

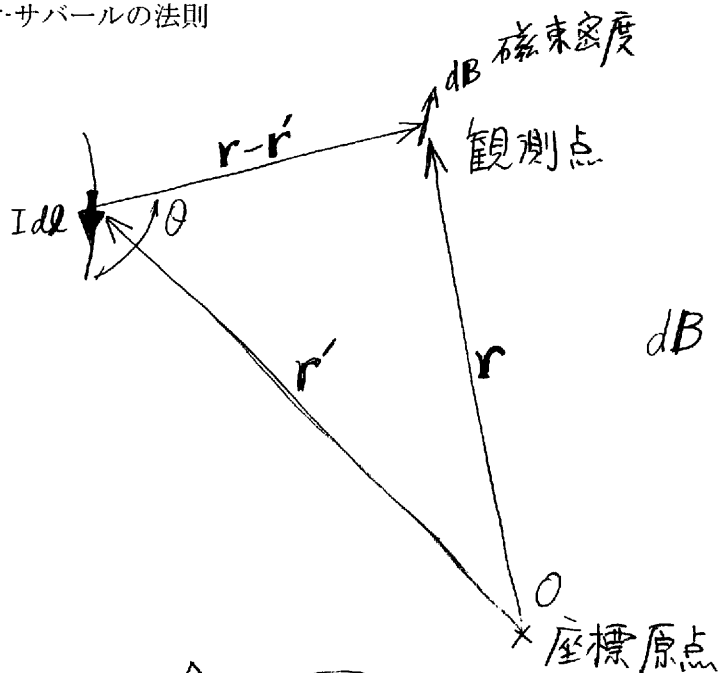
第2回

内容 ・ 前回の復習

- ・ アンペアの法則
- ・ 磁束密度の基本方程式（真空中）
- ・ ベクトルポテンシャル
- ・ ベクトルポテンシャルの基本方程式
- ・ まとめ

前回の復習

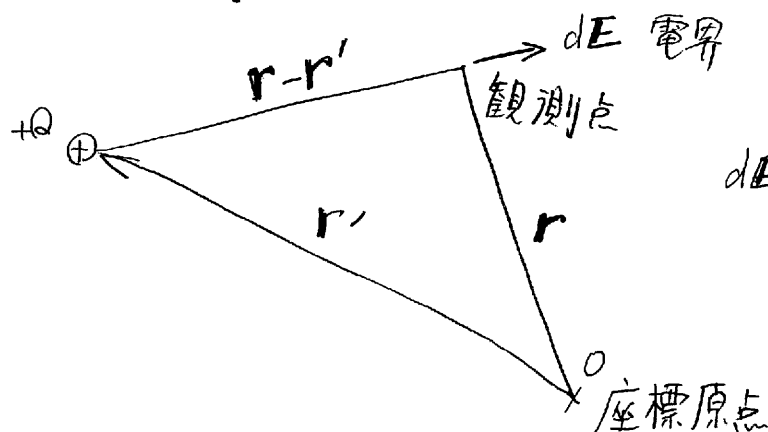
ビオ-サバールの法則



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times (r-r')}{|r-r'|^3}$$

⇕ 対応

クーロンの法則



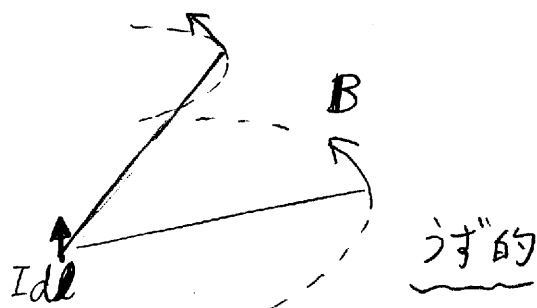
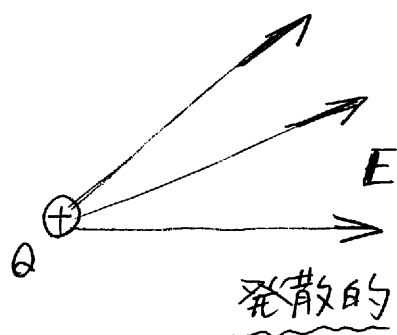
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r-r')}{|r-r'|^3}$$

対応

$$E \leftrightarrow B$$

$$Q \leftrightarrow Idl$$

$$\epsilon_0 \leftrightarrow 1/\mu_0$$

E と B 

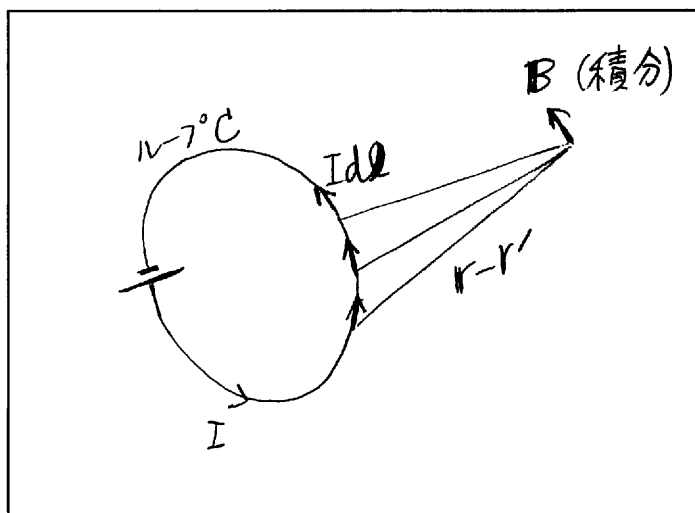
B には静電界と違ってベクトル積 $\times$ が含まれる。
 このあたりの事情が、静電界と違って難しいとか、
 方向がややこしいという印象を与えている。
 しかし数式的には極めてスマートに整理されてい
 るのはアンペアの数学的な手腕のおかげである。

電流ループの作る磁束密度

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\ell \times (r - r')}{|r - r'|^3}$$

電流素片というものは便宜上考えたものに過ぎないので、上式のように実在する電流路(回路)に沿って積分してはじめて意味を持つ。

どんな電流ループでも、この式のように積分すれば磁束密度は求めることができる。



しかし、この積分はベクトルの積分であり、いちいち方向を考えながら積分する非常にやっかいな計算である。静電界のときも似たような状況があった。クーロンの法則を使って全電荷の作る静電界は各電荷からの電界を積分すれば求まるが、これもベクトル計算であり非常にやっかいであった。しかし、その代わりにガウスの法則を使うと簡単になる場合があった(球対称や軸対称など、対称性のよい形に電荷が分布しているとき)。静電界にガウスの法則があるように、磁束密度にはアンペアの法則がある。ガウスの法則がクーロンの法則から導き出せたように、アンペアの法則もビオ-サバルの法則から導出できる。それはあとで行うとして、まずアンペアの法則と計算例から説明する。

アンペアの法則

空間の中の任意の閉ループに沿って B を線積分した値は、そのループをふちとする面を貫く全電流値に μ_0 をかけた値に等しい。(下図参照)

式による表現

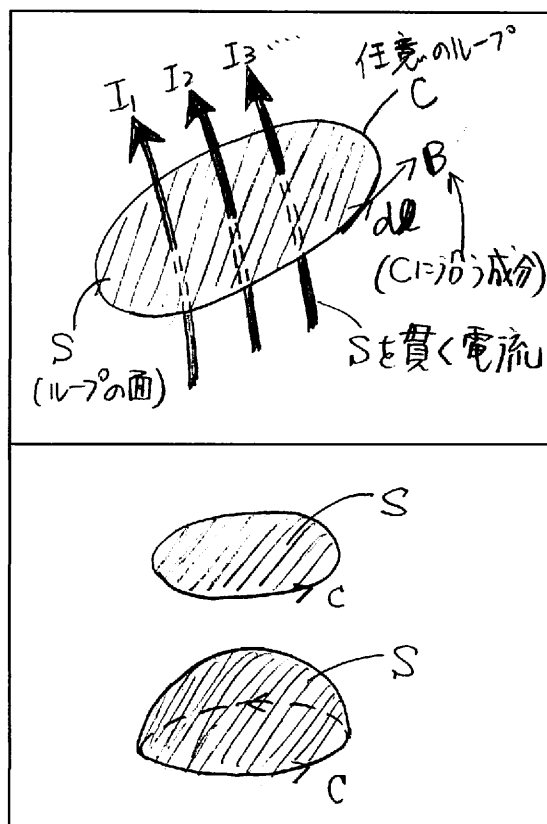
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

($\mathbf{i}$ は電流密度)

$$\text{微分表現} \quad \text{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

積分表現と微分表現が同じものであることは、ベクトル公式の一つであるストークスの公式を使って確かめることができる(各自行ってみよ)。

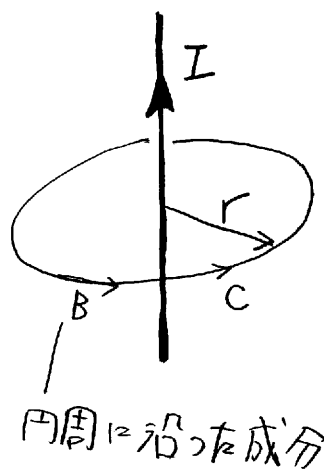
なお、上で言葉で説明したアンペアの法則の中にループをふちとする面という表現があるが、この面はループをふちとしていればどんな形でもよく、平面である必要はない。たとえば右図のように膨らんでいてもよい。このこと(任の形の面でよいこと)は、実は後で出てくる磁束密度の基本方程式の一つ(磁束密度の発散は常に 0)と密接に関係しているが、それは後で述べる。



アンペアの法則の、最も簡単な適用例

直線状電流の作る磁束密度。アンペアの法則の積分表現において、左図のようにループ C をとる。軸対称の形をしているので C の上では B は一定値である。したがって積分表現の式の左辺は $B \cdot 2\pi r$ また右辺は $\mu_0 I$ なので、これらを等しいとおいて $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ となり、すでに前回述べた磁束密度が得られる。

これは最も簡単な例である。もう少し複雑な例は教科書の p.160~p.162 にある。(講義でも説明するが、各自参照せよ。) また、演習問題でも他の形を扱う予定である。いずれにしても、このように対称性のよい電流分布の作る磁束密度は、ビオ・サバールの法則を使うよりも、アンペアの法則を使うほうが、よほど簡単に求められるのである。



ビオ-サバールの式からアンペアの法則を導出 (骨子は教科書と同じ。時間があれば講義する)

問題は、ビオ・サバールの式 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I d\mathbf{\ell}_1}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r}$ で与えられる磁束密度が、アンペアの法則

$$\oint_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell}_2 = \mu_0 I$$

を満たすことを示すこと。

前者の $\mathbf{B}$ を後者の左辺に代入すると (図にすると下図(a)のようになる)

$$\oint_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\mathbf{\ell}_1 \times \mathbf{r}/r) \cdot d\mathbf{\ell}_2}{r^2} \quad (1)$$

この式の右辺の積分の中は、ベクトル公式から

$$\frac{(d\mathbf{\ell}_1 \times \mathbf{r}/r) \cdot d\mathbf{\ell}_2}{r^2} = \frac{(d\mathbf{\ell}_2 \times d\mathbf{\ell}_1) \cdot \mathbf{r}/r}{r^2} \text{ となる。}$$

この式は右図(b)(c)のように、点 P から微小面積 dS を見た立体角を表している。式(1)の中では、まずこれを C_2 に沿って ($d\mathbf{\ell}_2$ に対して) 周回積分している。この積分は右図(d)のように、点 P から見た幅 $d\mathbf{\ell}_1$ のリングの立体角になる。さらにリングの上のふちと下のふちのループを C_2 および C_2' とすると、結局

$$\oint_{C_2} \frac{(d\mathbf{\ell}_2 \times d\mathbf{\ell}_1) \cdot \mathbf{r}/r}{r^2}$$

= [P 点からリング全面積をみた立体角]

= [C_2 の面の立体角] - [C_2' の面の立体角]

さらに右図(a)と(e)から

= [点 P から見た C_2 の立体角]

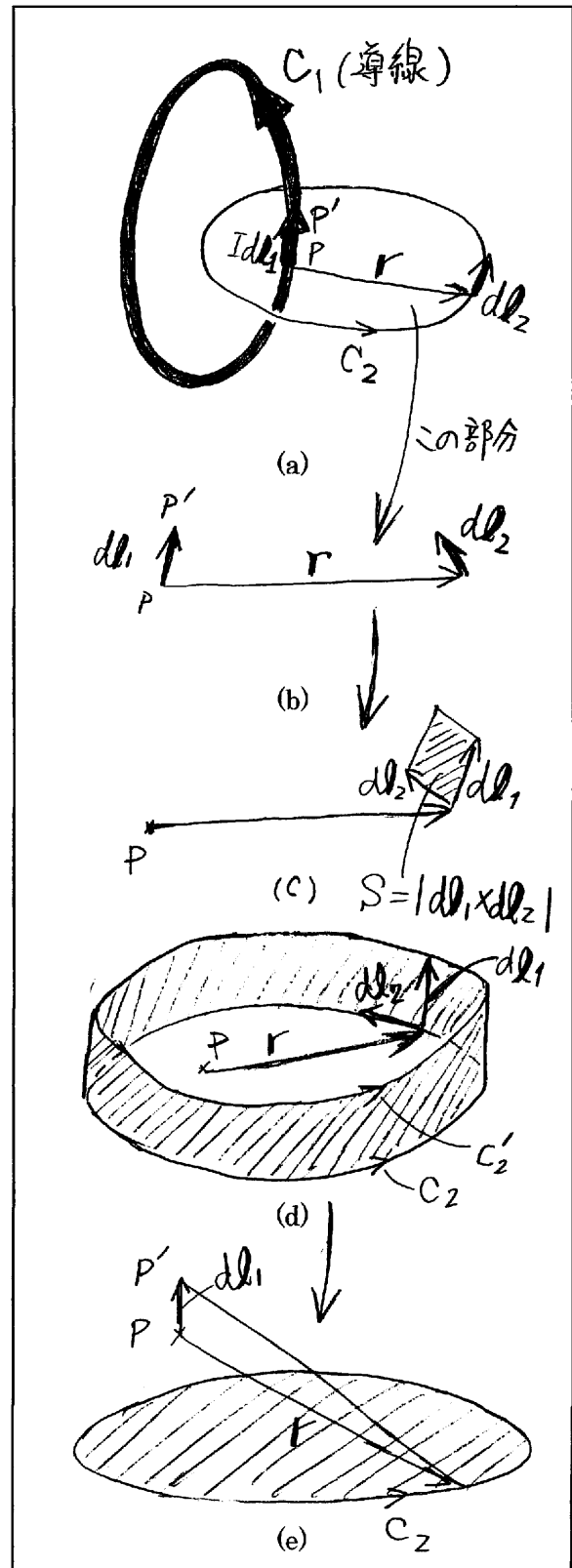
- [点 P' から見た C_2 の立体角]

$$\equiv \Omega_2 - \Omega_2'$$

したがって式(1)は

$$\oint_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1(P' \rightarrow P)} (\Omega_2 - \Omega_2')$$

最初 P と P' が両方とも C_2 の面の真上にあるとして、 P を固定して P' を C_1 に沿って周回して積分する。 P に対しては $\Omega_2 = 2\pi$ 、 P' が周回積分によって C_2 の面の真下に来たとすると $\Omega_2' = -2\pi$ 、したがって $\Omega_2 - \Omega_2' = 4\pi$ となって、上式に代入すればアンペアの法則が得られる。 C_2 が電流ループ C_1 と交差していなければ $\Omega_2 - \Omega_2' = 0$ となる。



磁束密度の基本方程式（真空中）

先に基本方程式がどういうものであるかを書くと

真空中の磁束密度は次の基本方程式を常に満たす。

$$\text{積分表現} \quad \begin{cases} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \sum_i I_i & (\text{既に説明したアンペアの法則}) \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 & (\text{任意の閉曲面 } S \text{ について成立}) \end{cases}$$

$$\text{微分表現} \quad \begin{cases} \text{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} & (\text{既に説明したアンペアの法則}) \\ \text{div} \mathbf{B} = 0 & (\text{空間の任意の点について成立}) \end{cases}$$

積分表現と微分表現は同じことを表している。一方から他方は導出できる。（アンペアの法則については前出と同じである。2番目の式についても各自確かめよ。）

真空中の磁束密度はこれら2つの基本方程式により解くことができるのである。（解く対象に応じて積分または微分のどちらかを用いる。）

アンペアの法則については既に説明した。2番目の式について以下説明する。

2番目の式もビオ-サバールの式から以下のように導出できる。（すると、基本方程式をわざわざ2つにしないでビオ-サバールの式一つだけにしておけばよいと思われがちであるが、このように2つに分けたほうが便利であり、また、後で説明するが、ひとつひとつが重要な意味を持っている。）

ビオ-サバールの式 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ で与えられる $\mathbf{B}$ に対して、 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ を示せばよいの

であるが、これは、この $\mathbf{B}$ の発散を計算して直接示すことができる。

$$\text{div} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \cdot \left(\oint_C \frac{d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \nabla \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (\nabla \text{ は } \mathbf{r} = (x, y, z) \text{ に対する演算子})$$

ベクトル公式 $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ を使って

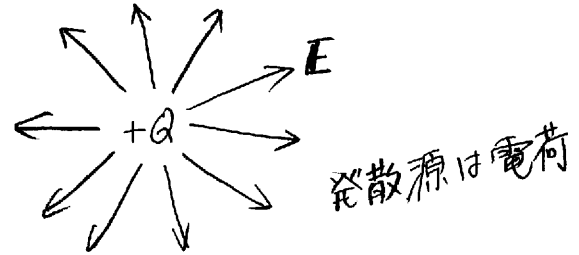
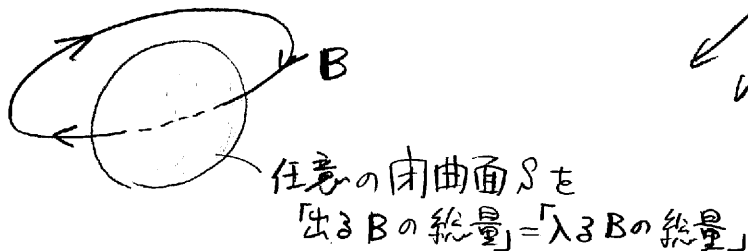
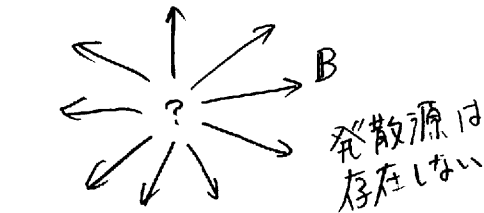
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\boldsymbol{\ell} \cdot \left(\nabla \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

この積分中の括弧の中を、 x, y, z の各成分ごとに分けて、それぞれ微分の計算をするとすべて 0 になることがわかる（各自確かめよ）。

物理的意味

基本方程式のひとつ $\text{div} \mathbf{B} = 0$ には重要な内容が含まれている。それを示すために、静電界と磁束密度の基本方程式を対応させて書いてみよう。

$\mathbf{B}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{E}$
$\text{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ (アンペアの法則、 $\mathbf{B}$ は $\mathbf{i}$ の周りの渦界)	$\Leftrightarrow$	$\text{curl} \mathbf{E} = 0$
$\text{div} \mathbf{B} = 0$	$\Leftrightarrow$	$\text{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ (ガウスの法則、 $\mathbf{E}$ は電荷密度の発散界)



この対応からも分かるように、 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ という式は、静電界と違って「磁束密度には発散の源になるようなものが存在しない」ということを意味している。(このような対応を見なくても div の意味から、あるいは積分表現から明らかではあるが。) 詳しく言うと、静電界のときの電荷に対応する磁荷(単極磁荷)は磁束密度には存在しない。磁石はどんなに細かくしても、必ず N 極と S 極の対でしか存在しない、ということである。あるいは、 $\mathbf{B}$ の力線は必ず閉ループになる(たどっていくと元に戻る)ということでもある(電気力線は電荷から放射状に出るのでこのようなことはない)。

$\text{div} \mathbf{B} = 0$ の余談

単極磁荷が存在しないという結論が、アンペアの実験結果をもとにしたビオ-サバールの式から導かれた。これは磁石が必ず両極あるという日常経験とよくあっている。しかし、あくまでも実験結果をもとに導出された結果であるということには注意する必要がある。実験はすべての場合を含んでいないかもしれないし、日常に単極磁荷がないからといって、絶対にないとは言いきれない。今のところ単極磁荷は発見されていないので、とりあえずこの式は正しいと考えてよいが、単極磁荷が将来もし発見されたら、この式は修正を余儀なくされる。これは物理学が数学と異なることを示す端的な例である。たとえば、ピタゴラスの定理は千年以上前からずっと正しいし、千年後も間違いなく正しいが、単極磁荷はそう言い切れないわけである。すすんだ議論では磁荷が存在しても全く矛盾しないという理論も作られており、本気で探している研究者もいるくらいである。しかし、我々はこの式を認めて、これをもとに先へ進むことにする。実際、この式をもとに作られたいろいろな電気製品があり、電気の文明が発展しているのだから、ほとんど正しいといっていいいだろう。

ベクトルポテンシャル

静電界の場合には、電界の次に電位（スカラーポテンシャル）というものを考えた。磁束密度に対しても同じようなものが考えられないか、というのがここでの内容である。

電位の場合、A 点を基準とする B 点の電位は 1 クーロンの電荷を A 点から B 点まで運ぶ仕事量として $V_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ で定義された。この仕事量は A 点から B 点までの道筋によらないので一意的に定まる。道筋によらないのは $\text{curl} \mathbf{E} = 0$ という式が成り立つからである。

磁束密度の場合は、仕事量を同じようなやり方で定義しようとする、スカラーである電荷の変わりに電流素片 $I d\mathbf{l}$ というベクトルを使うことになる。また、うずが 0 という式は成り立たないので、電位にはない任意性（一意的でない部分）が生じてしまう。したがって、仕事量からポテンシャルを定義するのはかなり複雑になってしまうだろう。（ただし、教科書では仕事量から定義する方法をとっている。複雑だが他の本には見られない独特の説明で一読の価値はある。）この講義では、仕事量から入るのはやめて、以下の方法をとる。

静電界から電位（スカラーポテンシャル）を定義した方法を、数学的に別の言い方に直すと、 $\text{curl} \mathbf{E} = 0$ なので $\mathbf{E} = -\text{grad} V$ を満たすスカラー関数 V が存在し、 $\mathbf{E}$ の代わりに V を用いて静電界の性質をあらわすことができる。これと同じ方法を $\mathbf{B}$ に適用するには、 $\text{curl} \mathbf{B}$ の式ではなく $\text{div} \mathbf{B} = 0$ を用いる。 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ なので $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$ を満たすベクトル関数 $\mathbf{A}$ が存在し、 $\mathbf{B}$ の代わりに $\mathbf{A}$ を用いて、電流の作る磁束密度の性質をあらわすことができる。

対応

$$\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\text{grad} V$$

このベクトル関数 $\mathbf{A}$ が、電位(スカラーポテンシャル) V に対応するベクトルポテンシャルである。

静電界と違ってポテンシャルはスカラーではなくベクトルである。静電界のときにはスカラーポテンシャルを使うことによってベクトルの 3 成分という複雑な話が簡単になったので便利であった。ポテンシャルを使う意味もそこにあった。しかし今回はポテンシャルもベクトルなので、あまり便利でないように見える（余計なものを持ち込んだように見える）。しかし、静電界の場合ほどではないが、便利になっていることが後でわかる。

ベクトルポテンシャルの任意性

静電界の場合のスカラーポテンシャルには、 V に任意の定数を加えても電界は変わらないという任意性があった。ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ に対しても、このような定数分の任意性は存在する（上述の定義式より明らかである）が、 $\mathbf{A}$ にはもっと複雑な任意性がある。

あるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ によって磁束密度 $\mathbf{B}$ が表されるとすると、 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \varphi$ (φ は任意のスカラー関数) というベクトルポテンシャルによっても同じ $\mathbf{B}$ が表される。

すなわち、任意のベクトル関数 $\text{grad} \varphi$ だけの任意性がある。（ $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}'$ から同じ $\mathbf{B}$ が出てくることは上述のベクトルポテンシャルの定義の式からすぐ示すことができる。各自確かめよ。）したがって、一見、全く異なる $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}'$ でも実は同じ $\mathbf{B}$ を与えるということがあり得る。

やっかいなことのように見えるが、逆に考えれば、たとえば最初に得られた $\mathbf{A}$ が複雑で扱いにくければ、自分で勝手に何か適当な $\text{grad}\varphi$ を加えて簡単なものにしてしまえばよいわけである。

「適当な $\text{grad}\varphi$ を加える」ということを「ゲージ変換を行う」という言い方をする。

ゲージ変換を行って $\mathbf{A}$ を簡単な式にしたり、基本方程式から $\mathbf{A}$ を求めるときに（後述）、簡単になるようにすることができる。ゲージ変換の代表例として、あとでクーロンゲージといわれるものを示す。その他の代表的な例としてローレンツゲージやランダウゲージなどがあるが、この講義では説明は省略する。

ベクトルポテンシャルの基本方程式

電位（スカラポテンシャル）の方程式としてラプラス・ポアソンの方程式があったように、ベクトルポテンシャルにも基本方程式がある。以下、これを導出する。

アンペアの法則の微分表現 $\text{curl}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ の左辺にベクトルポテンシャルの定義式 $\mathbf{B} = \text{curl}\mathbf{A}$ を代入すると $\text{curl}(\text{curl}\mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ （ベクトル公式を用いた）、したがって

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{i}$$

ここで、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を満たすベクトルポテンシャルのみを考えることにする。つまり、 $\mathbf{A}$ がもしこれを満たさなければ適当な $\text{grad}\varphi$ を加えて $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ にしてしまうのである。 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を満たす $\mathbf{A}$ のことをクーロンゲージの $\mathbf{A}$ とよぶ。このとき上式は

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{i}$$

これが（クーロンゲージにおける）ベクトルポテンシャルの基本方程式である。すなわち電流密度分布が空間に与えられたとき、その分布からベクトルポテンシャルを直接に求める方程式である。電位（スカラポテンシャル）に対するポアソンの方程式 $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ と同じ形をしている（今の場合 $\mathbf{A}$ も $\mathbf{i}$ もベクトルである点が異なるが）。

上式を x, y, z 成分に分けて具体的に書くと

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x = -\mu_0 i_x \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y = -\mu_0 i_y \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z = -\mu_0 i_z \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{対応} \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = -\rho/\epsilon_0$$

この方程式の解（特解）は

$$\mathbf{A} = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{i} dv}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\ell}{r} \quad \begin{array}{c} \text{対応} \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad V = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dv}{r}$$

解を図で表すと以下ようになる（つまり電流分布または電荷分布が距離 r のところにベクトルポテンシャルまたはスカラポテンシャルを作る）。



上述の方程式は次のように用いる。

まず、電流密度分布（または任意の形状の線電流）が与えられると、それを用いて上述の解のように積分により $\mathbf{A}$ を求める。（あるいは3成分の微分方程式を解いてもよい。）このようにして求められた $\mathbf{A}$ を用いて $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$ を計算して、 $\mathbf{B}$ を求める。つまり、 $i \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ という計算順序をたどる。具体的な例は次回説明するが、演習でも行うであろう。

これは静電界のとき、まず V をポアソンの方程式または電荷分布の積分から求めて、この V から $\mathbf{E} = -\text{grad} V$ によって $\mathbf{E}$ を求めたのと全く同じことである。

静電界のときと違って、 $\mathbf{A}$ の場合はスカラーで扱うという簡単なことにはなっていないが、上述の基本方程式を見ると分かるように、 x 成分 A_x は電流密度の x 成分 i_x から作られ、 y 成分は y 成分から、 z 成分は z 成分から、というように完全に分離している。したがって、方程式の数は減らないが独立したスカラーの方程式に分解することはできている。また、電流分布の方向からベクトルポテンシャルの方向は比較的容易に予想できる。たとえば直線電流の作るベクトルポテンシャルは電流と同じ方向の成分しかないので、その成分の方程式だけ解けばよく、結局はスカラーの方程式を解いているのと同じである。

ベクトルポテンシャルを使わずアンペアの法則によって電流分布から磁束密度を直接求めるときは、これらのことは成り立たない。実際、電流分布の方向から磁束密度の方向を予想するには3次元空間を思い描きながら考える必要があるのでかなりややこしい話になる。

もちろん、電流分布が対称性のよい形をしていれば、アンペアの法則で十分な場合も多い。

まとめ

