

第1回

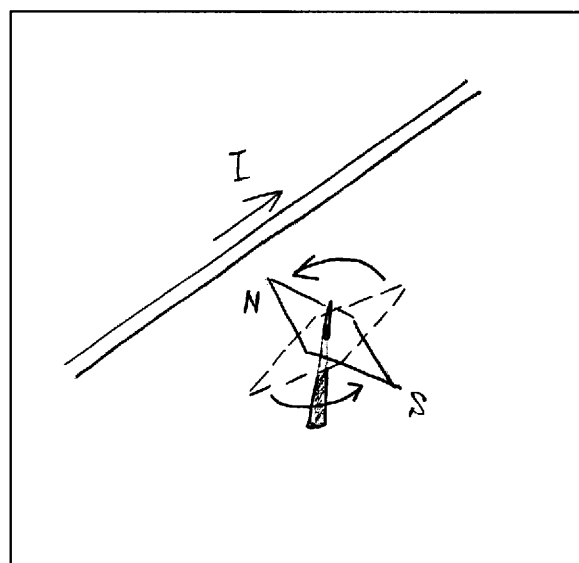
内容 ・ 電流にはたらく力

- ・ 磁束密度 B
- ・ 電流にはたらく力の電子による説明（補足的）
- ・ ビオ-サバールの法則（電荷分布による電界の発生との対応）
- ・ まとめ

電流にはたらく力**エルステッドの発見（コペンハーゲン 1820）**

エルステッドが電流を説明する講義で、実演の最中に、近くにあった方位磁針が電流の開閉によって変化することを偶然に発見。すなわち、電流が磁石と同じ種類の力を発生することを発見した。

方位磁針の動き方から、この力は電流と方位磁針が引き合ったり反発する中心力ではなく、電流を取り囲むように力が発生していることが分かった。（当時、重力にせよ、静電気力にせよ、すべて中心力だったので、中心力でない力は少なからぬ衝撃だった。）また、力の性質は電流を流す導線の材料には無関係であり、電流と磁石の間に物質を置いても変わらなかった。

**「界」という考え方**

電流が方位磁針に何か力を及ぼしているわけだが、考え方をもう少し拡張して、次のように考える。電流によって、周囲に力の原因になるような「何か」が発生している。これは方位磁針の有無にかかわらず発生していると考え。たまたま方位磁針を置けば、その「何か」が力として検知されるのである。要するに、これは電流と方位磁針の間だけのことでなく、空間全体に電流が何かを発生したと考える。（今の場合は、電流を取り巻くように「何か」が発生している。）

この「何か」を通常「界」とか「場」と呼んでいる。（英語では「field」であるが日本語では「界」「場」の二種類がある。電気系では「界」、物理では「場」と呼ぶことが多いようである。）このような「界」の例として、すでに静電界（電荷が作る界）を前半に学んだ。

電流によって発生した界（磁石によって発生する界と同じ）は、講義の教科書では「誘磁界」と名づけている。電流による界を表す適切な言葉であるが、しかし歴史上は、この界は「磁束密度」という名前がつけられてしまっているのので、この講義でもこの慣習に従って、磁束密度とよぶ。数式による磁束密度の定義はすぐあとで述べる。

この講義では、電流をもとにして磁束密度を説明していく。別の進み方として、磁石と磁石の間にはたらく力からスタートする進み方もあるが、この講義ではすべて電流から考える。実は磁石も分子の中の電子の運動による微小電流の集まりであると考えることができるので、この進み方は一貫して用いることができる。

あとで磁界という言葉が出てくるが、これは電流を中心に考えるときには、実は界ではない。歴史上、磁石の間の力から磁気学が発展したという経緯から、やや混乱して紛らわしい名前がつけられているのであるが、界は磁束密度のほうである。

余談

- 磁気現象の最初の発見は、ギリシャ時代で、クレタ島の羊飼いが杖の先端につけた鉄が地面に吸い付くことから、磁鉄鉱の磁気作用として発見されたという話がある。また、マグネット（磁気）の語源は磁鉄鉱の産地マグネシア（小アジア）に由来する。
- 中国では方位磁石として軍隊の遠征に紀元前からすでに使われていた。車につけられて使われ「指南車」とよばれた。現代のジャイロコンパスやGPSのような感覚であろう。正しい方向を示すという意味で指導に使われる「指南」という言葉はこれに由来する。（ただ、後には指南車は差動歯車による機械的な装置に置き換わったようである。）
- 磁石の間の力について、電荷の間の力との比較検討がギルバート（1600年）やクーロン（1785年）^{より}に行われている。磁石の間にも電荷と同じクーロンの法則が、やはりクーロンによって見出された。しかし磁石の場合は両極の磁荷を単独に取り出すことは出ない。つまり、単極磁荷というものは存在しない（後で講義で詳しく説明する）。これは電荷との大きな違いである。この講義で、磁束密度を電流をもとにして説明するのも、これが根本的な理由である。

磁束密度 B

界である磁束密度を、アンペアの実験結果に基づいて、数式により具体的に定義する。

アンペアの実験

電流と方位磁針の間に力がはたらくという発見に続いて、2つの電流の間にも力が働くことがアンペアによって発見された。アンペアは下図1のような3種類の方向について、2つの電流の間に働く力を定式化した。

まず、同方向の2つの電流について（図1(a)）

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 \ell}{r} \quad (1)$$

$\mu_0/2\pi$ は比例定数である。ただ単に一文字だけの比例定数で書いてもよいのだが、あとで便利なよう

にこのようにおいてある。 μ_0 は真空中の透磁率とよばれる。単位も含めて書くと

$$F[\text{N}] = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1[\text{A}]I_2[\text{A}]\ell[\text{m}]}{r[\text{m}]} \quad (2)$$

この式から比例定数 μ_0 の単位は $[\text{N}/\text{A}^2]$ であるが、これを通常、 $[\text{H}/\text{m}]$ （ヘンリー／メートル）という単位で表す。比例定数の実際の値は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H}/\text{m}]$ 。

磁束密度

この実験式を次のように書き換える。

$$F = I_2 \ell \times \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \right) \quad (3)$$

単に順序を変えて書いただけであるが、実は次のような考え方が入っている。カッコの部分は電流 I_1 のつくる界であり、右辺の最初の部分にある長さ ℓ の I_2 という電流が、この界の中で力を受けていると考えるのである。そこで、界である磁束密度は次のように書ける。

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \quad (4)$$

すなわち、これが直線電流 I_1 の作る界、磁束密度である。力は、したがって、

$$F = I_2 \ell B \quad (5)$$

ベクトルによる表現

図1(a)の実験だけでは、磁束密度の方向については何もわからない。図1(b)(c)の実験まですべて含めると、磁束密度はベクトルであり、電流を取り囲むように発生していることが分かるのである。電流と力もベクトルなので、すべてをベクトルで表現すると次のようになる。

$$\mathbf{F} = \ell (\mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}) \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\mathbf{I}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{1}{r} \quad (7)$$

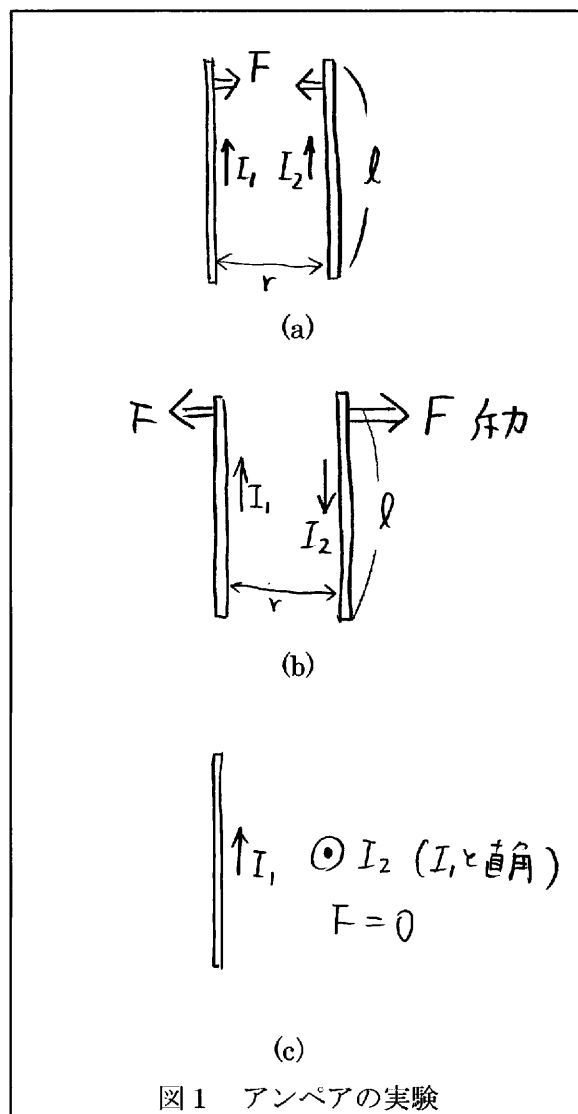


図1 アンペアの実験

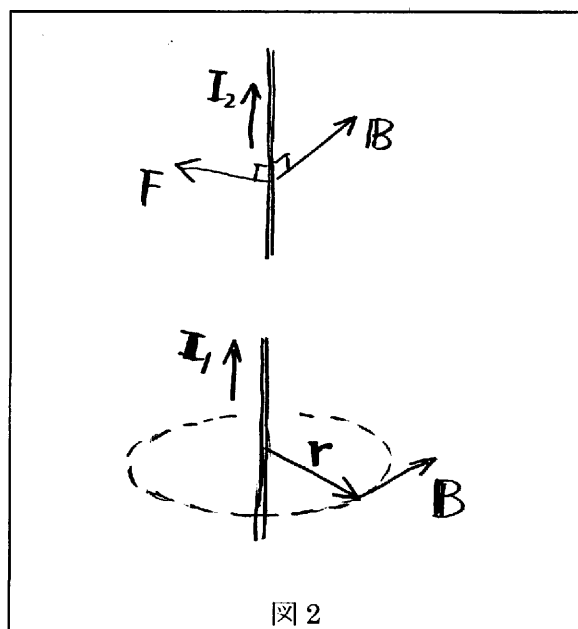


図2

これらを図 2 に示した。式(7)の $\mathbf{r}/r$ は r 方向（電流 I_1 から放射状の方向）の単位ベクトルを表しており、このベクトルと電流ベクトルの外積の方向が $\mathbf{B}$ の方向となる。すなわち、 $\mathbf{B}$ は電流 I_1 を取り囲むように発生していることがわかる。(上式によって図 1 (a)～(c) がすべてうまく表されることがわかる。各自確かめよ。)

磁束密度 $\mathbf{B}$ の単位

$\mathbf{B}$ の単位は式(5)から $\frac{[\text{N}]}{[\text{m}][\text{A}]}$ であるが、これを通常[T]（テスラ）と書き、この単位が用いられる。

(以前は $[\text{Wb}/\text{m}^2]$ （ウェーバ/平方メートル）という単位が用いられた。テスラと同じものである。)

実際に世の中に存在する $\mathbf{B}$ の大きさはどれほどであろうか（これを知っておくことは重要である。机上の数式による理論だけでなく、実感を持ったり、現実 to いろいろな装置を設計したりするときが必要であるから。）。これについては、具体的にコイルなどで $\mathbf{B}$ を発生させる場合を演習で計算する。

この講義および演習の最初の数回は、いろいろな電流の形（直線だけでなくコイルなど）によって、どのような $\mathbf{B}$ が発生するかということを計算する方法が中心テーマになる。

電流にはたらく力の電子による説明（補足的）

電流というのは微視的には電子の流れであるから、磁束密度により電流にはたらく力も、もっと微視的に見れば電子にはたらく力である。ここでは、それを具体的に数式で表してみる。

電流は次のように表すことができる（この講義の前半の最後でやったと思う）。

$$I = \text{断面を単位時間に通過する電荷} = envS (= \text{電子電荷} \times \text{電子密度} \times \text{電子速度} \times \text{導線断面積}) \quad (8)$$

この式を用いると電流にはたらく力は

$$\mathbf{F} = (I \times \mathbf{B})\ell = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})nS\ell \quad (9)$$

この式中の $nS\ell$ は導線内の全電子数を表すので、電子一個にはたらく力はこの式から

$$\mathbf{f} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

すなわち、磁束密度 $\mathbf{B}$ の中を速度 $\mathbf{v}$ で移動する電子にはこのような力がはたらいているのである。この力をローレンツ力とよんでいる。この力はあとでファラデーの法則を説明する際に改めて出てくる。

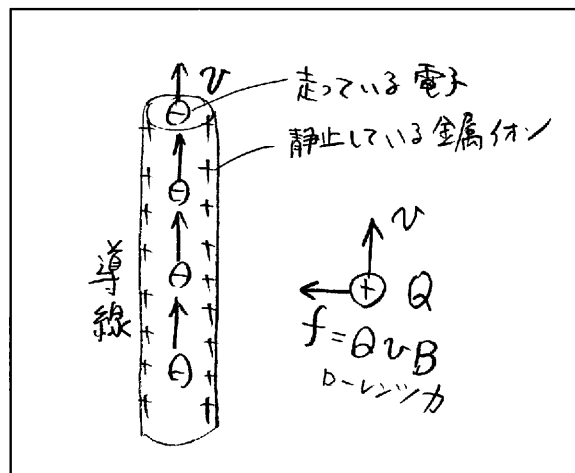
参考（やや脱線しているので、とばしてもよい）

いま、~~半導体~~ 直線状電流 I の近くを電荷 Q が電流と同じ方向に速度 v で走っているとする。この電荷には電流の作る磁束密度によりローレンツ力がはたらく。ここで、次のような疑問に対してはどう考えたらよいだろうか。

速度 v で電荷 Q とともに走っている観測者から見たら、電荷 Q は静止していることになる。したがって、この観測者は「電荷 Q にはローレンツ力にはたらかない」と結論してしまいそうである。つまり静止している観測者と走っている観測者では別の結論になる。しかし静止している観測者から見たら電荷 Q はローレンツ力により電流のほうに引き寄せられていくはずであり、この動きは、どの観測者から見ても同じに見えるはずであるから、走っている観測者が間違っていることになる。

どこに矛盾があるのだろうか。

今までの式は走っている観測者には成り立たない、ということではない。実は、走っている観測者には、電荷 Q に以下のような力が見えている。話を複雑にしないため、導線に対しては次のように考えておく。導線は静止している正電荷（金属イオン）の列の中を電子（負電荷）が速度 v （簡単のため観測者と同じ速度）で走っているとする。このとき、走っている観測者にとっては導線中の電子と電荷 Q が静止しているかわりに導線の金属イオンが逆方向に速度 v で動いていることになる。走っている物体は、特殊相対性理論によるとローレンツ収縮を起こしている。つまり、



長さ l の物体は $l\sqrt{1-(v/c)^2}$ に収縮する (c は光速)。導線も走っている観測者から見ると、このように収縮しているが、導線中の電荷の総量は変わらないとすると、この収縮により金属イオンの線電荷密度が、静止のとき ρ とすると、 $\rho/\sqrt{1-(v/c)^2}$ になる。逆に電子の密度は走っていたとき ρ だったので、静止したときは $\rho\sqrt{1-(v/c)^2}$ になる。すなわち、走っている観測者から見ると、これら正負の電荷の差 $\Delta\rho = \rho/\sqrt{1-(v/c)^2} - \rho\sqrt{1-(v/c)^2} = (v/c)^2\rho/\sqrt{1-(v/c)^2}$ が発生したように見えるのである。この電荷により、導線の周りに電界 $E = \Delta\rho/(2\pi\epsilon_0 r)$ が発生し、その結果、電荷 Q にクーロン力 $f = QE$ がはたらく。走っている観測者はこの力を観測することになるが、実はこれがローレンツ力と同じものになる（力 f を計算して、光速 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ を用いるとわかる。ただし、光速がこの式になることは、講義では一番最後の回に出てくるので少し我慢してもらいたい。また、この計算だけでは力 f はローレンツ力と係数 $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ だけ違ってくるが、 v は普通は光速よりずっと小さいので問題にはならない。また、特殊相対性理論を厳密にとりいればこの係数の違いはなくなる。）

ビオ-サバールの法則

直線状電流による磁束密度 B は式(4)あるいは式(7)で表されることがわかった。しかし、これは直線状電流にしか使えない式である。たとえばコイル状など、いろいろな形の電流分布の発生する磁束密度に対しては使えない。ここでは、この直線状電流の式をもとにして、いろいろな電流形状に使うことができる式を導出する。

直線状電流による磁束密度（ベクトルでない大きさのみ）の式をもう一度書いてみる（右図 3(a)）。

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (11)$$

さて、前半の講義でやったと思うが、直線状の電荷分布（線密度、単位長さあたり $\rho[\text{C/m}]$ ）による静電界 E は

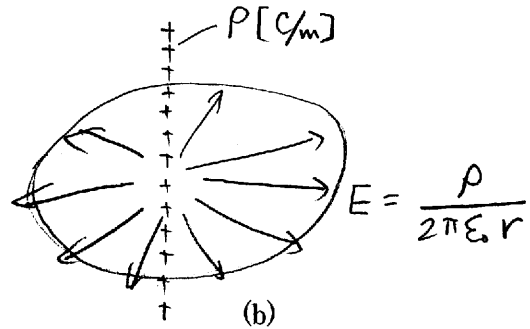
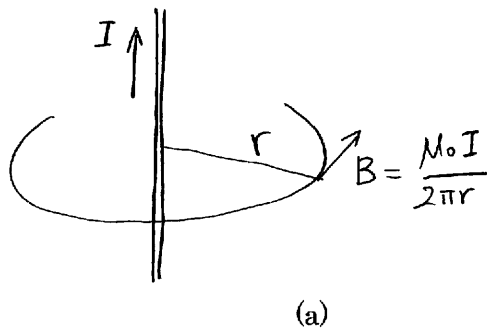


図 3

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r} \quad (12)$$

この電界を磁束密度 B と比較して図 3(b) に示した。この式は B の式と非常によく似ている。しかし B の場合と異なり、いきなり出てきたのではなく、クーロンの法則から次のように導出される。

右図 4 を参照して、線上の各点の微小な素片の電荷 $\rho\Delta\ell$ の作る電界 ΔE の半径方向成分 $\Delta E \sin\theta$ を線電荷全体にわたって合計して

$$E = \sum \Delta E \sin\theta = \sum \frac{\rho\Delta\ell}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin\theta = \sum \frac{\rho\Delta\ell}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{r}{r'} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho r' d\ell}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + \ell^2)^{3/2}} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (13)$$

そこで、 B の場合にも、線上の各点の微小な素片の電流 $I_1\Delta\ell$ からの磁束密度が合計されて、その結果として式(11)ができていると考えてみる。

(現実には、電流はつながっており、細かく切って取り出すことはできないので、これは概念上のことと考えておく。)

電荷に対するクーロンの法則（上式(13)の途中の式を参照）と同じように、電流素片 $I_1\Delta\ell$ の作る磁束密度が

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1\Delta\ell}{r'^2} \sin\theta \quad (14)$$

であると考えれば、電界のときの式(13)と全く同じように計算して、式(11)が得られる。(各自確かめよ。) ただし、図 5 のように、 ΔB の方向に注意しな

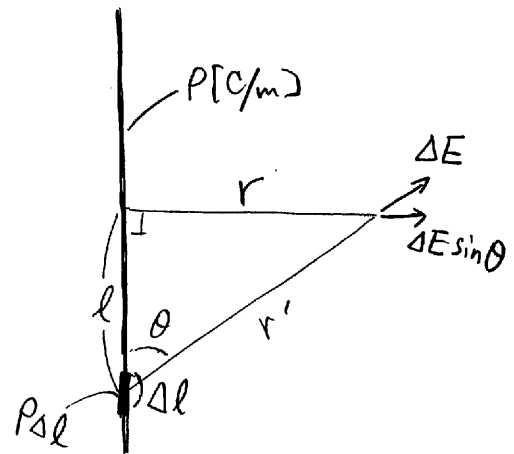


図 4

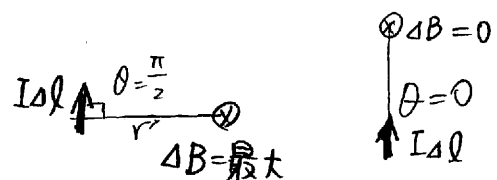
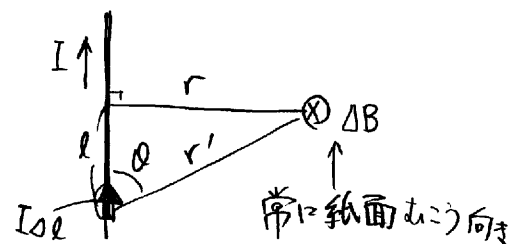


図 5

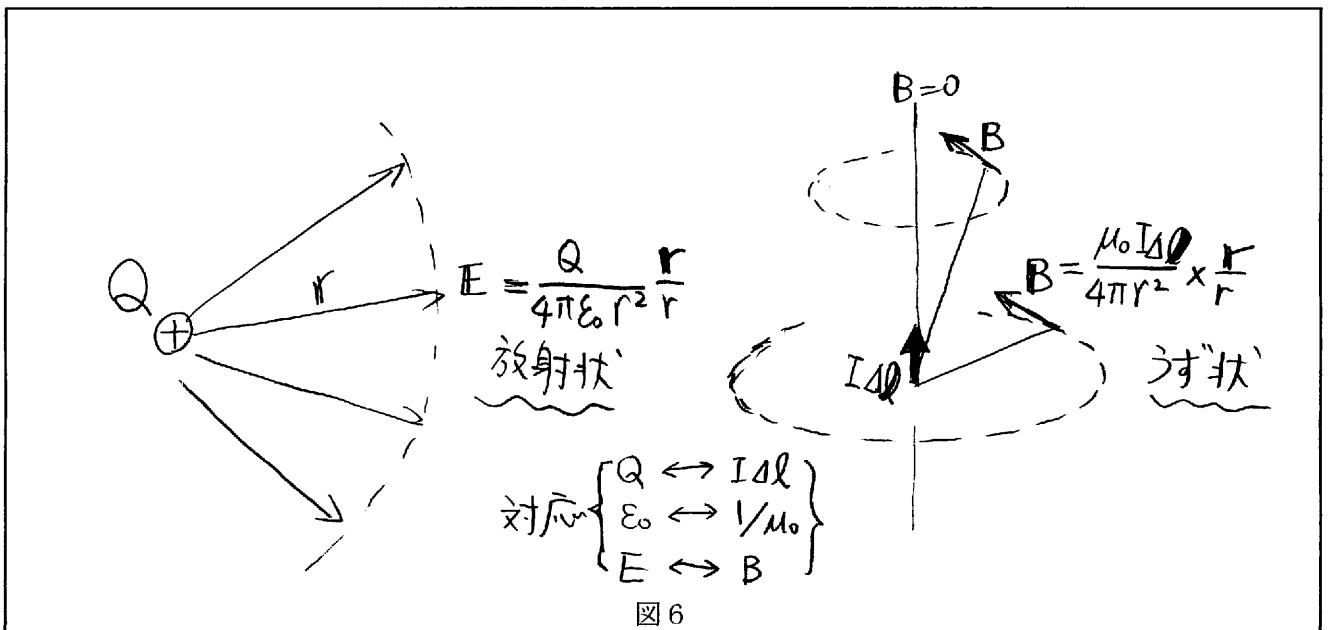
なければならない。また $\sin \theta$ はいつでもつけておく必要がある。つまり、静電界と違って B の方向はいつも同じだが、大きさが $\sin \theta$ に比例すると考えるのである。電界がいつも電荷から放射状に同じ大きさで出ているのに対して、磁束密度は角度によって大きさが異なる。とくに $\theta = \pi/2$ で最大、 $\theta = 0$ では 0 になる。

式(14)をベクトルで表現すると

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \Delta \ell}{r'^2} \times \frac{\mathbf{r}'}{r'} \quad (15)$$

これが磁束密度に対するクーロンの法則の役割をする式で、ビオ-サバールの式とよばれる。クーロンの法則と同様に、電流素片からの距離の 2 乗に逆比例して磁束密度が与えられている。ただし、磁束密度の方向は静電界と全く異なっているので注意が必要である。

下図 6 に静電界との対応を示した。

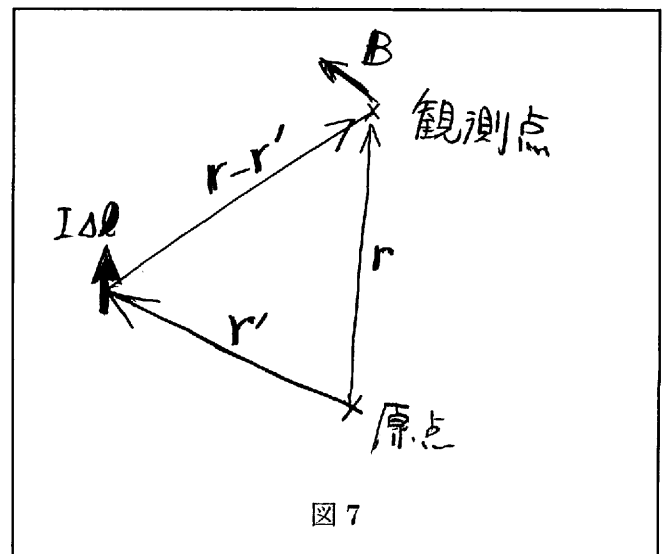


右図 7 のように原点、電流素片の位置、観測点を指定すると、式(15)は次のようになる（要するに原点をずらしたことになる）。

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \Delta \ell \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (16)$$

これは電流素片が空間の任意の位置にあるときに使える一般的な表現になっていて、これを空間の中の電流の線に沿って積分すれば、全体の合計としての磁束密度が得られるわけである。

その具体的な計算は演習で行うはずである。



まとめ (重要な点のみ)

● ビオ-サバールの式

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \Delta \ell \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\text{静電界のクーロンの法則に対応})$$

● 電流にはたらく力

$$\mathbf{F} = (I \times \mathbf{B})\ell$$

これらはすべて実験から導かれた式である。数学のように公理から導かれた定理とは根本的に異なる。次回はアンペアの法則について講義する。(静電界ではクーロンの法則からガウスの定理へと話が進んだ。これと同様に磁束密度ではビオ-サバールの式からアンペアの法則へと進む。) **法則**