

回転運動

- 二次元の回転

量子化された回転の定性的な原因

回転の量子化

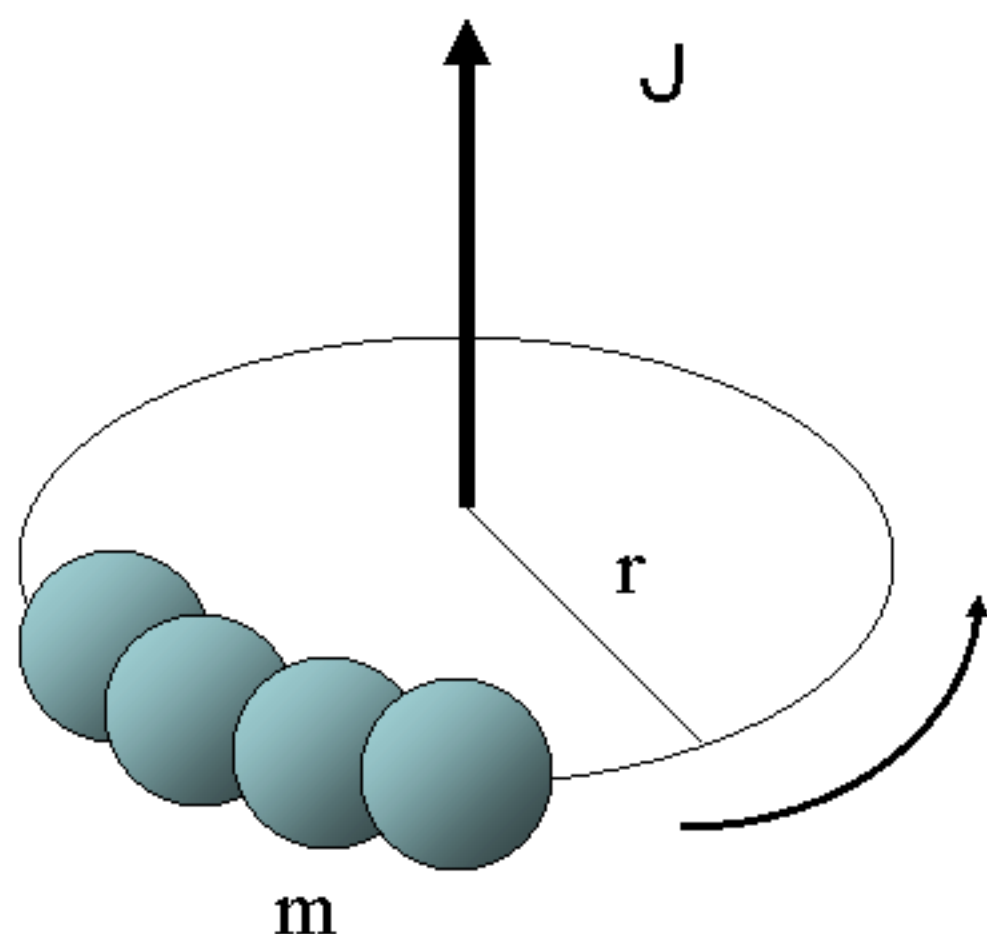
- 三次元の回転

回転運動に関するシュレーディンガー方程式

角運動量 空間量子化 ベクトル模型

- スピン

回転運動



角運動量 $J = I\omega$

慣性モーメント I

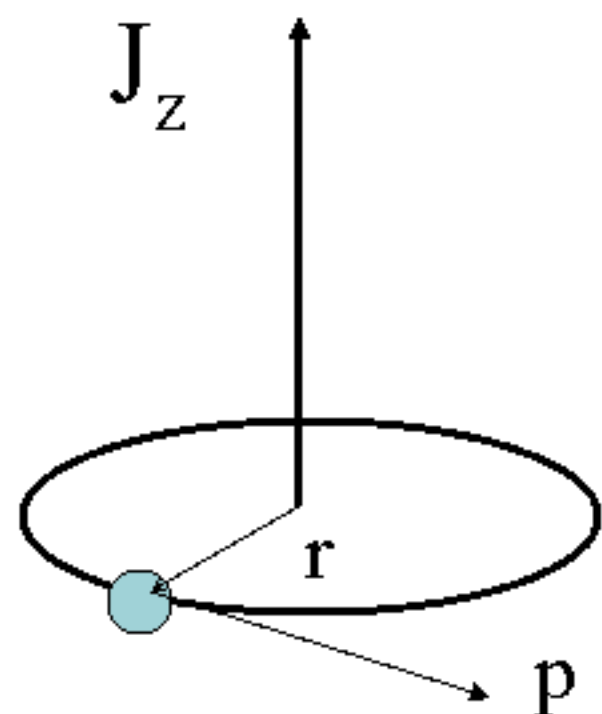
角速度 ω

慣性モーメント $I = mr^2$

偶力 $T = \frac{dJ}{dt}$

回転エネルギー $E_K = \frac{T^2 \tau^2}{2I}$

全エネルギー $E = p^2 / 2m$



$$J_z = \pm pr$$

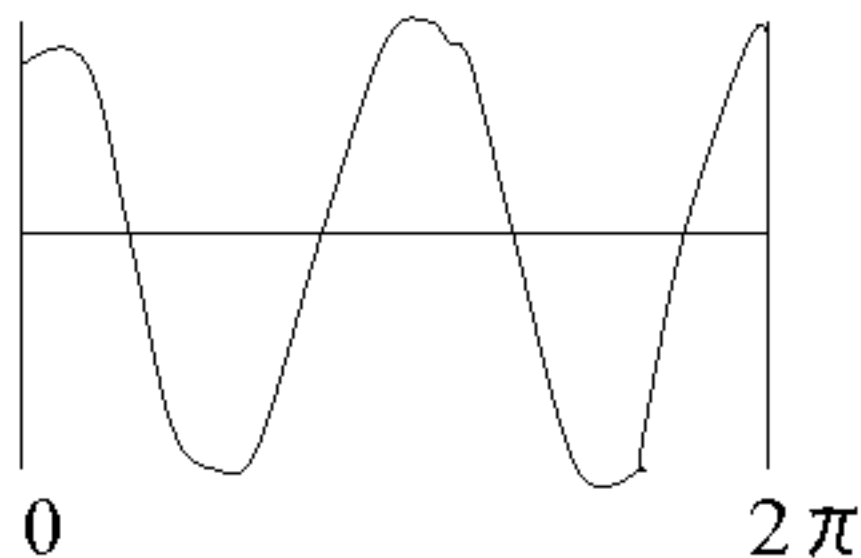
$$E = J_z^2 / 2mr^2 = J_z^2 / 2I$$

$$p = h / \lambda \qquad \lambda = \frac{2\pi r}{m_l}$$

$$J_z = \pm \frac{hr}{\lambda} = \frac{m_l hr}{2\pi r} = \frac{m_l h}{2\pi}$$

$$J_z = m_l \hbar \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$E = \frac{m_l^2 \hbar^2}{2I}$$



2次元の回転運動の波動関数

$$H\psi = E\psi \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

極座標系で $x = r \cos \phi$ $y = r \sin \phi$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

r 一定なので $= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

シュレーディンガー方程式は $-\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} = E\psi$

$$\psi_{m_l}(\phi) = \frac{e^{im_l\phi}}{(2\pi)^{1/2}} \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

回転の量子化

回転エネルギーの量子化

$$E = m_l^2 \hbar^2 / 2I$$

二重に縮退

$$m_l = \pm 1, \pm 2, \dots$$

角運動量の量子化

$$J_z = m_l \hbar$$

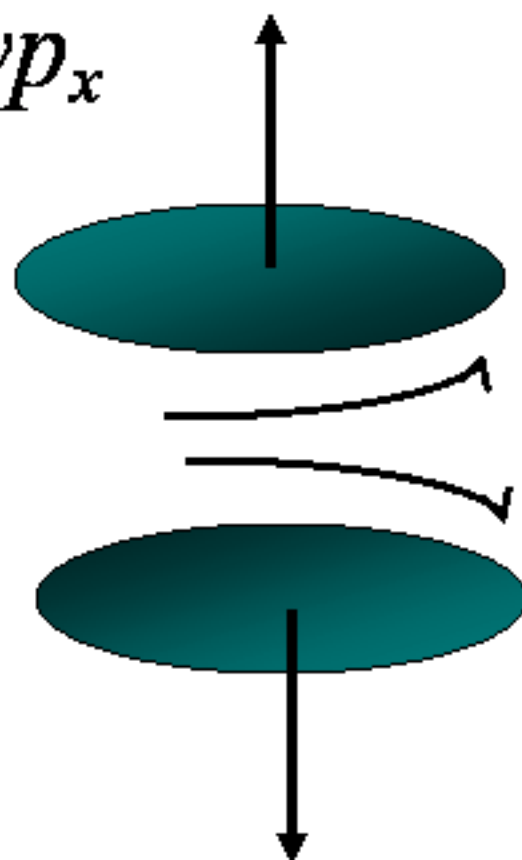
$|m_l|$ が増加すると波長は減少し、角運動量は増加

Z軸まわりのオービタル角運動量 $l_z = xp_y - yp_x$

オービタル角運動量の演算子

$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \longrightarrow \hat{l}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\hat{l}_z \psi_{m_l} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_{m_l}}{\partial \phi} = m_l \hbar \psi_{m_l}$$



三次元の回転

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda^2$$

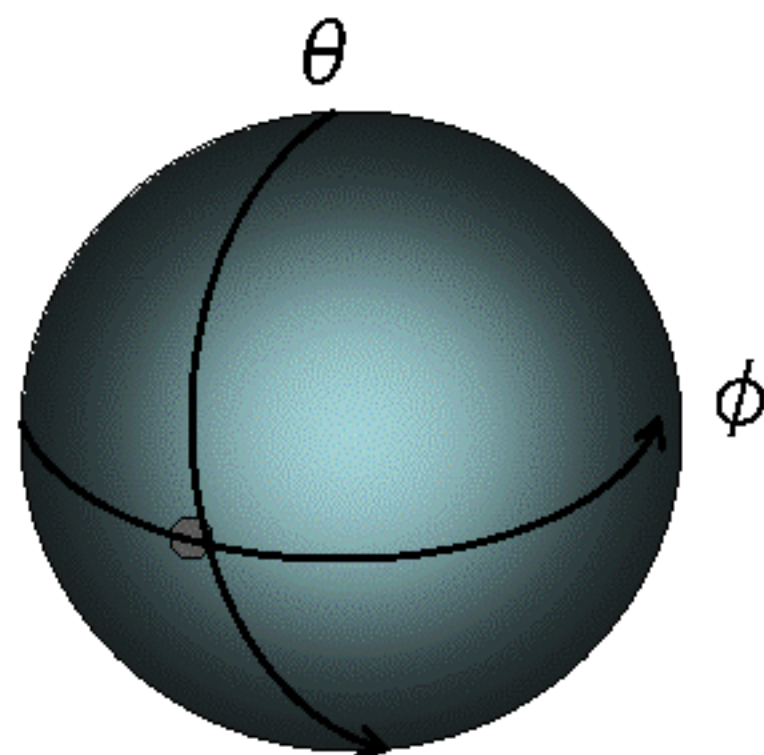
$$\Lambda^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

シュレーディンガー方程式は

$$\frac{1}{r^2}\Lambda^2\psi = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

変数分離法

$$\psi(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$



$$\Delta^2 \psi = -\varepsilon \psi \quad \varepsilon = \frac{2IE}{\hbar^2}$$

$$\frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = -\varepsilon \Theta \Phi$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = -\varepsilon \sin^2 \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_l^2 \\ \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \varepsilon \sin^2 \theta = m_l^2 \end{array} \right.$$

$$\psi(\theta, \phi) = Y_{l, m_l}(\theta, \phi) \quad \begin{array}{l} l = 0, 1, 2, \dots \\ m_l = l, l-1, \dots, -l \end{array}$$

$$\psi(\theta, \phi) = Y_{l, m_l}(\theta, \phi) \quad \text{球面調和関数}$$

$$\text{量子数} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$m_l = l, l-1, \dots, -l \quad 2l+1 \text{ 個}$$

$$\text{エネルギー} \quad E = l(l+1)\hbar^2 / 2I \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{角運動量の大きさ} \quad = \{l(l+1)\}^{1/2} \hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{角運動量のz成分} \quad = m_l \hbar \quad m_l = l, l-1, \dots, -l$$

スピン 電子の高速自転

$$\text{スピン角運動量} \quad \text{量子数} \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\text{スピン磁気角運動量} \quad m_s = s, s-1, \dots, -s$$

空間量子化

$$l = 2$$

ベクトルの大きさ

$$\{l(l+1)\}^{1/2}$$

配向(向き)

m_l の数

$2l+1$ 個

