移動現象の基礎

流れ場における移動現象を表す方程式の導出

c : **流体単位体積あたりの物理量** [X・m^{-3}]

流体の質量 : $c=\rho$ [kg・m^{-3}]

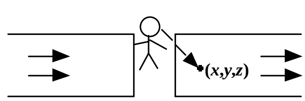
運動量 : $c=\rho v$ [kg・m・s^{-1}・m^{-3}]

物質量 : $c=C$ [mol・m^{-3}]

熱 : $c=\rho C_p T$ [J・m^{-3}]

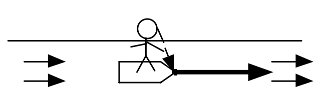
観察方法

(1)**視点を点**(x,y,z)**に固定**



観測される変化 : $\dfrac{\partial c}{\partial t}$

(2)**視点を流れに無関係に移動させる**



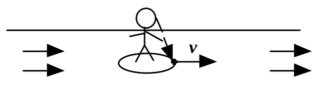
観測される変化 : 全微分

$$\frac{dc}{dt}=\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

視点(ボート)の速度 : $\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right)$

(3)視点を流れと同じ速度で移動させる

観測される変化：実質微分



$$\frac{Dc}{Dt}=\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\downarrow \quad \leftarrow \boldsymbol{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=\left(v_x,v_y,v_z\right)$$

$$=\frac{\partial c}{\partial t}+v_x\frac{\partial c}{\partial x}+v_y\frac{\partial c}{\partial y}+v_z\frac{\partial c}{\partial z}$$

全微分の特別な場合：視点の速度が流体の速度と一致

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$ ：実質微分演算子

(1):Euler の方法
(3):Lagrangeの方法

移動現象操作

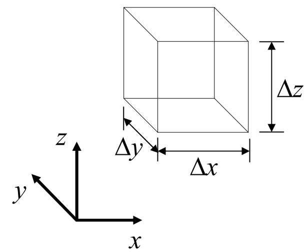
着目する量の移動についての収支式

貯まる量＝入る量－出る量－消える量

↓

質量　：連続の式
運動量：運動方程式
物質　：対流拡散方程式
熱　　：熱移動方程式（エネルギー保存式）

微小検査体積についての収支



1.**貯まる量**

$$\frac{\partial c}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \ [\mathrm{X \cdot s^{-1}}]$$

2.**消える量**

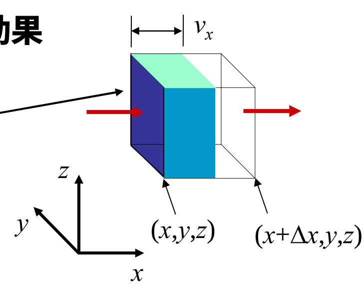
R:**単位時間,単位体積あたりの消失量**$[\mathrm{X \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}}]$

$R\Delta x\Delta y\Delta z \ [\mathrm{X \cdot s^{-1}}]$

3.**入る量，出る量**

入る，出る：　I.**対流**　II.**分子運動の効果**

I.**対流**



x**軸に垂直な面**

面積$=\Delta y\Delta z$

単位時間に面を通過する流体の体積：　$v_x\big|_x \Delta y\Delta z \ [\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}]$

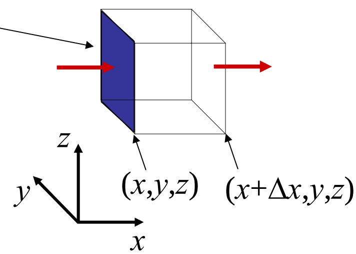
単位時間に入る量：　$cv_x\big|_x \Delta y\Delta z$　$[\mathrm{X \cdot s^{-1}}]$

出る量：　$cv_x\big|_{x+\Delta x} \Delta y\Delta z$

	入	出
x方向	$cv_x\big\|_x \Delta y\Delta z$	$cv_x\big\|_{x+\Delta x} \Delta y\Delta z$
y方向	$cv_y\big\|_y \Delta z\Delta x$	$cv_y\big\|_{y+\Delta y} \Delta z\Delta x$
z方向	$cv_z\big\|_z \Delta x\Delta y$	$cv_z\big\|_{z+\Delta z} \Delta x\Delta y$

II.分子運動の効果

x**軸に垂直な面**
面積$=\Delta y\Delta z$



x**軸に垂直な面を**
通過する流束： $\Phi_x = -\kappa \dfrac{\partial c}{\partial x}$ $[\mathrm{X} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$

κ $[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$

単位時間に入る量：$\left.\Phi_x\right|_x \Delta y \Delta z$ $[\mathrm{X} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$

同様に出る量：$\left.\Phi_x\right|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$

	入	出
x方向	$\left.\Phi_x\right\|_x \Delta y\Delta z$	$\left.\Phi_x\right\|_{x+\Delta x} \Delta y\Delta z$
y方向	$\left.\Phi_y\right\|_y \Delta z\Delta x$	$\left.\Phi_y\right\|_{y+\Delta y} \Delta z\Delta x$
z方向	$\left.\Phi_z\right\|_z \Delta x\Delta y$	$\left.\Phi_z\right\|_{z+\Delta z} \Delta x\Delta y$

以上をまとめると

1. **貯まる量** $\dfrac{\partial c}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$
2. **消える量** $R\Delta x\Delta y\Delta z$
3. **入る量，出る量**

	対流 入	対流 出	分子効果 入	分子効果 出
x方向	$\left.cv_x\right\|_x \Delta y\Delta z$	$\left.cv_x\right\|_{x+\Delta x} \Delta y\Delta z$	$\left.\Phi_x\right\|_x \Delta y\Delta z$	$\left.\Phi_x\right\|_{x+\Delta x} \Delta y\Delta z$
y方向	$\left.cv_y\right\|_y \Delta z\Delta x$	$\left.cv_y\right\|_{y+\Delta y} \Delta z\Delta x$	$\left.\Phi_y\right\|_y \Delta z\Delta x$	$\left.\Phi_y\right\|_{y+\Delta y} \Delta z\Delta x$
z方向	$\left.cv_z\right\|_z \Delta x\Delta y$	$\left.cv_z\right\|_{z+\Delta z} \Delta x\Delta y$	$\left.\Phi_z\right\|_z \Delta x\Delta y$	$\left.\Phi_z\right\|_{z+\Delta z} \Delta x\Delta y$

流束：$c\mathbf{v}$ **流束**：Φ

ベクトルまたはテンソル

収支式 貯まる量＝入る量ー出る量ー消える量

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z = & \; cv_x\big|_x \Delta y\Delta z - cv_x\big|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z \\
& + cv_y\big|_y \Delta z\Delta x - cv_y\big|_{y+\Delta y}\Delta z\Delta x \\
& + cv_z\big|_z \Delta x\Delta y - cv_z\big|_{z+\Delta z}\Delta x\Delta y \\
& + \varPhi_x\big|_x \Delta y\Delta z - \varPhi_x\big|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z \\
& + \varPhi_y\big|_y \Delta z\Delta x - \varPhi_y\big|_{y+\Delta y}\Delta z\Delta x \\
& + \varPhi_z\big|_z \Delta x\Delta y - \varPhi_z\big|_{z+\Delta z}\Delta z\Delta x \\
& - R\Delta x\Delta y\Delta z
\end{aligned}
$$

$$\Big\downarrow \quad /\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\left(\frac{\partial cv_x}{\partial x}+\frac{\partial cv_y}{\partial y}+\frac{\partial cv_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial \varPhi_x}{\partial x}+\frac{\partial \varPhi_y}{\partial y}+\frac{\partial \varPhi_z}{\partial z}\right)-R$$

$$\Big\downarrow \quad \frac{\partial \varPhi_x}{\partial x} = -\kappa\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\left(\frac{\partial cv_x}{\partial x}+\frac{\partial cv_y}{\partial y}+\frac{\partial cv_z}{\partial z}\right)+\kappa\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right)-R$$

質量:連続の式

$$\frac{\partial c}{\partial t}=-\left(\frac{\partial cv_x}{\partial x}+\frac{\partial cv_y}{\partial y}+\frac{\partial cv_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)-R$$

特徴:

- $c=\rho$
- **分子効果による移動,消失項なし(ΦとRの項なし)**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho v_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right)$$

$$\downarrow \qquad \frac{\partial \rho v_x}{\partial x}=v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}}_{\frac{D\rho}{Dt}}=-\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

非圧縮性では=0

$$\frac{\partial c}{\partial t}=-\left(\frac{\partial cv_x}{\partial x}+\frac{\partial cv_y}{\partial y}+\frac{\partial cv_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)-R$$

$$\downarrow \qquad \frac{\partial cv_x}{\partial x}=v_y\frac{\partial c}{\partial y}+c\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+v_x\frac{\partial c}{\partial x}+v_y\frac{\partial c}{\partial y}+v_z\frac{\partial c}{\partial z}=-c\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)-R$$

非圧縮性流体

$$\downarrow \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+v_x\frac{\partial c}{\partial x}+v_y\frac{\partial c}{\partial y}+v_z\frac{\partial c}{\partial z}=-\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right)-R$$

以下ではこの式を使う